2015-09-02

GYMNASIEMATEMATIK
FÖR LÄKARSTUDENTER

Nils Karlsson

INDEX

MATEMATISKA TAL.....2
Värdesiffror.....2
Absolutbelopp.....3
Skala.....3
STATISTIK.....4
Lägesmått.....4
Spridningsmått.....4
Normalfördelning.....4
ALGEBRA.....5
Matematiska uttryck.....5
Matematiska relationstecken.....6
Ekvationer.....6
Ekvationssystem.....7
Räkneregler för potenser och rötter.....8
Räkneregler för polynom.....8
Andragradsekvationer.....9
Rationella uttryck.....9
Logaritmer.....9
Talet *e* och den naturliga logaritmen.....10
GEOMETRI.....11
Vinklar.....11
Geometriska vinkelförhållanden.....12
Trigonometri.....13
Trigonometriska kurvor.....16
(INFINITESIMAL)KALKYL.....17
Funktioner.....17
Derivering.....18
Deriveringsregler.....19
Maximum-, minimum- och terrasspunkter.....20
Andraderivator.....20
Primitiva funktioner.....21
Integraler.....21

MATEMATISKA TAL

Reella tal avser alla rationella respektive irrationella tal. Rationella tal avser alla tal som kan skrivas som kvoter av heltal (i bråkform med heltal som täljare respektive nämnare). Eftersom alla heltal kan skrivas som bråk med nämnaren 1 så är alla heltal också rationella tal. Irrationella tal avser alla övriga reella tal, till exempel talet π.

Imaginära tal avser alla tal som är multiplikationer av den imaginära enheten i, till exempel $2i$ som utgör kvadratroten av –4.

$$i=\sqrt{-1}$$

$$i^2=-1$$

$$\sqrt{-4}=2i$$

Komplexa tal avser uttryck där både reella och imaginära tal ingår.

Värdesiffror

Med värdesiffror, alternativt "signifikanta siffror" eller "gällande siffror", avses siffror som bidrar till ett tals precision. Som värdesiffror räknas dels alla siffror som inte är 0 och dels alla nollor som följer efter icke-nollor i tal som anges med decimaler. I ett tal som saknar decimaler kan nollor som ligger i slutet av talet vara värdesiffror men det går inte att utläsa av talet ensamt.

95 har 2 värdesiffror
0,95 har 2 värdesiffror
0,950 har 3 värdesiffror
950 har 2 eller 3 värdesiffror
950,0 har 4 värdesiffror

När flera tal multipliceras eller divideras så ges resultatet samma antal värdesiffror som det ingående talet med det lägsta antalet värdesiffror. När flera tal adderas eller subtraheras så ges resultatet samma antal decimaler som det ingående talet med det lägsta antalet decimaler.

Absolutbelopp

Absolutbeloppet för ett tal avser enbart talets kvantitet och bortser från ett eventuellt minustecken. Absolutbelopp skrivs som två lodräta streck runt talet ifråga.

$$|4| = 4$$

$$|-4| = 4$$

Skala

Skala skrivs med formatet *a*:*b*, där *a* motsvarar den observerade storleken och *b* motsvarar den verkliga storleken. Skalangivelser är enhetslösa och relativa; de säger bara att om den observerade storleken är *a* så är den verkliga storleken *b*. Till exempel betyder 20:1 att observerad storlek är 20 gånger större än verklig storlek medan 1:10 betyder att verklig storlek är 10 gånger större än observerad.

STATISTIK

Statistik, en gren inom tillämpad matematik, handlar om insamling och analys av matematiska data. Ordet kommer från latinska *statisticum* ("stats-") och italienska *statista* (politiker). Detta stycke skrapar bara lite på ytan – det finns mycket mer att lära sig om man är nyfiken på ämnet.

Lägesmått

Medelvärdet beräknas som summan av alla mätvärden dividerat med antalet mätvärden. Medianvärdet fås fram genom att mätvärdena sorteras i storleksordning. Ifall antalet mätvärden är udda så är det mätvärdet i mitten som utgör medianen; ifall antalet mätvärden istället är jämnt så är det genomsnittet av de två mätvärdena i mitten som utgör medianen.

Spridningsmått

Variationsbredden avser avståndet mellan det största och det minsta värdet. Kvartiler fungerar som medianer men avser värdena mellan den första och den andra fjärdedelen av mätvärdena (första eller nedre kvartilen), den andra och den tredje fjärdedelen av mätvärdena (andra kvartilen eller medianen) respektive den tredje och den fjärde fjärdedelen av mätvärdena (tredje eller övre kvartilen). Standardavvikelsen är ett mått på hur mycket mätvärdena tenderar att avvika från medelvärdet. Först beräknas differensen mellan varje mätvärde och medelvärdet, sedan upphöjs varje uträknad differens till 2, sedan summeras alla kvadrater, sedan divideras summan med *antalet mätvärden minus ett* och slutligen beräknas kvadratroten ur det uttrycket.

Normalfördelning

En sannolikhetsfördelning som används mycket ofta inom statistiken är normalfördelningen. Data som är normalfördelade kännetecknas av att medelvärdet ± 1 standardavvikelse omfattar cirka 68 % av mätvärdena, medelvärdet ± 2 standardavvikelser omfattar cirka 95 % och så vidare.

ALGEBRA

Algebra är läran om hantering av matematiska uttryck och ekvationer. Ordet algebra kommer från arabiska och betyder ungefär "återförening av delar".

Matematiska uttryck

Matematiska uttryck består av ett antal termer varav en eller flera kan vara variabler, till exempel:

$$x+1$$

Förenkling innebär att ett uttryck skrivs om för att minimera antalet termer.

$$x+1+2+3+4+2x+x^2$$

$$(x+2x)+(1+2+3+4)+(x^2)$$

$$x^2+3x+10$$

Vid bråkförenkling kan nämnare och täljare multipliceras inom bråken så att rätt nämnare erhålls.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{x+1}\cdot\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{x+1}$$

$$\frac{4}{2x+2}+\frac{x+1}{2x+2}$$

$$\frac{4+x+1}{2x+2}$$

$$\frac{5+x}{2x+2}$$

Faktorisering innebär att man istället går åt andra hållet, från en summering av termer, för att få fram vilka faktorer som ett uttryck kan sägas bestå av.

$$2x^2+4xz$$

$$x(2x+4z)$$

Faktorisering kan även göras som ett delsteg vid förenkling, för att få fram en större förenkling än vad som vore möjligt med enbart förenkling som metod.

Matematiska relationstecken

a är större än *b*	$a>b$
a är lika med eller större än *b*	$a\geq b$
a är lika med *b*	$a=b$
a är lika med eller mindre än *b*	$a\leq b$
a är mindre än *b*	$a<b$

Ekvationer

En ekvation utgörs av två matematiska uttryck och ett matematiskt relationstecken dem emellan, oftast ett likhetstecken (det vill säga att det ena uttrycket är lika med det andra uttrycket). Detta begränsar vilka värden som är möjliga att anta för variablerna i uttrycken.

$$x+1=2$$

För att lösa ekvationer, det vill säga identifiera variablernas värden, kan man använda sig av flera olika matematiska manipulationer för att lösa ut variabler, det vill säga få fram en ekvation där en enkel variabel står på den ena sidan om relationstecknet och övriga termer står på den andra sidan. En absolut regel för dessa matematiska manipulationer är att det som man gör med uttrycket på ena sidan om relationstecknet måste man även göra med uttrycket på andra sidan. Additioner och subtraktioner görs enkelt medan multiplikationer och divisioner (inklusive potenser och rötter) omfattar <u>samtliga</u> termer. Division eller multiplikation med negativa tal innebär också att relationstecken för större/mindre växlas till mindre/större.

$$2x+2=4$$

$$\frac{2x+2}{2}=\frac{4}{2}$$

$$x+1=2$$

$$x+1-1=2-1$$

$$x=1$$

I ovanstående räkneexempel hade det varit enklare att börja med att subtrahera 2 från båda sidorna, för att få bort konstanterna från vänstersidan, och sedan dividera båda sidorna med 2 för att få fram den enkla variabeln på vänstersidan.

Ekvationssystem

Ekvationssystem utgörs av flera ekvationer med flera variabler. Variabelvärden som passar samtliga ekvationer i ekvationssystemet utgör lösningar på det. Som regel behöver antalet ekvationer vara lika stort som antalet variabler för att det ska vara lösligt. Ekvationssystem med två variabler löses genom att man löser ut en variabels ekvation ur den ena grundekvationen och sätter in den i den andra, varefter den andra variabelns värde beräknas och sedan sätts in i den första grundekvationen.

Ekvationssystemet

(1) $x+2y=7$

(2) $3x-2y=5$

kan då till exempel lösas genom utlösning av x från ekvation 1

$$x=7-2y$$

och insättning i ekvation 2

$$3(7-2y)-2y=5$$

vilket ger att

$$y=2$$

som sätts in i ekvation 1

$$x+2(2)=7$$

vilket ger att

$$x=3$$

och således är lösningen på ekvationssystemet $x=3$, $y=2$.

Ovanstående metod kallas för substitutionsmetoden. En annan metod, additionsmetoden, går ut på att man först manipulerar den ena ekvationen så att en senare addition av ekvationerna innebär att en variabel försvinner helt. I ovanstående exempel skulle det inte behövas någon manipulation eftersom y-termerna redan skulle ta ut varandra; om så inte hade varit fallet så hade istället den första ekvationen kunnat multipliceras med –3 för att få x-termerna att ta ut varandra vid additionen. Efter att additionen har genomförts kan man enkelt beräkna värdet på den återstående variabeln och sedan sätta in det i någon av de ursprungliga ekvationerna för att få den andra variabelns värde.

(3) $(x+2y)+(3x-2y)=7+5$ ger $4x=12$ eller $x=3$

vilket insättes i ekvation 1

(1) $3+2y=7$ ger $2y=4$ eller $y=2$

Räkneregler för potenser och rötter

I nedanstående ekvationer motsvarar *a* ett valfritt tal.

Grundläggande samband för potenser:

$$a^2 = 1 \cdot a \cdot a$$

$$a^1 = 1 \cdot a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

Förhållandet mellan potenser och rötter:

$a^{(1/2)} = \sqrt[2]{a}$ (observera att kvadratrötter kan vara antingen positiva eller negativa!)

$$a^{(1/n)} = \sqrt[n]{a}$$

Multiplikationer:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$(a^x)^y = a^{(x \cdot y)}$ och då även $(a^x)^{(1/y)} = a^{(x/y)}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ och då även $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisioner:

$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$ och då även $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

Räkneregler för polynom

Multiplikationer av uttryck inom parenteser:

$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ d.v.s. först multipliceras *a* med *c* och *d*, sedan *b* likaså

Kvadreringsreglerna:

$$(a+b) \cdot (a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b) \cdot (a-b) = a^2 + b^2 - 2ab$$

Konjugatregeln:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

Andragradsekvationer

En andragradsekvation kännetecknas av att den innehåller en variabelterm som är upphöjd till 2. Ett möjligt sätt att lösa dessa är att använda sig av kvadreringsreglerna och konjugatregeln. Ett annat sätt är att manipulera termerna så att man får en ekvation med nedanstående struktur där q är en ensam konstant, p är koefficienten till x och x^2 saknar koefficient.

$$x^2+p\cdot x+q=0$$

När man utgår från ovanstående struktur så gäller nedanstående samband.

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Om summan av termerna under kvadratroten är större än 0 så finns två lösningar, om summan är lika med 0 så finns en lösning och om summan är mindre än 0 så finns inte några reella lösningar (se imaginära tal).

Rationella uttryck

Med "rationella uttryck" avses divisioner med polynom i täljaren och nämnaren. Vid förenkling och faktorisering av rationella uttryck gäller, som vanligt, att de manipulationer som man gör påverkar både hela täljaren och hela nämnaren. Vid addition eller subtraktion med två rationella uttryck är en vanlig metod att man först förlänger dem med varandras nämnare så att deras nämnare blir lika; om det ena rationella uttrycket har nämnaren $(x+1)$ så multipliceras det andra rationella uttryckets täljare och nämnare med $(x+1)$ och vice versa.

Logaritmer

Med en logaritm avses den exponent x som utifrån basen a (som är större än 0) ger resultatet b. Eftersom logaritmens värde beror på basens storlek måste man även ange vilken bas som logaritmen utgår ifrån.

$a^x=b$ har $\log_a(b)=x$ vilket utläses som "a-logaritmen för b är x".

$2^6=64$ har $\log_2(64)=6$ vilket utläses som "2-logaritmen för 64 är 6".

$4^3=64$ har $\log_4(64)=3$ vilket utläses som "4-logaritmen för 64 är 3".

Eftersom $x=\log_a b$ i det första ovanstående exemplet så kan $a^x=b$ även skrivas som $a^{\log_a b}=b$. Miniräknare och datorers logaritmfunktioner har som regel talet 10 som bas. Om man på en miniräknare knappar in "100" och trycker på LOG så får man alltså svaret 2. Knappar man istället in "64" och trycker på LOG så får man svaret 1,806179974... som alltså är vad man upphöjer 10 till för att få resultatet 64. Om logaritmens bas inte anges i en formel så betyder det att basen är 10.

Räkneregler för logaritmer:

$$\log(a\cdot b)=\log(a)\cdot\log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

$$\log(a^b)=b\cdot\log(a)$$

Talet *e* och den naturliga logaritmen

Talet *e*, även kallat Eulers tal (efter matematikern och fysikern **Leonhard Euler**), är en matematisk konstant som utgör bastalet för den naturliga logaritmen. De fyra första värdesiffrorna är 2,718 och *e* har, i likhet med *π*, ett obegränsat antal decimaler.

Talet *e* är basen som med exponenten *x* har derivatan 1 vid $x=0$. Matematiskt kan talet *e* även beskrivas med nedanstående formel.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Den naturliga logaritmen är logaritmen som använder talet *e* som bas och kan skrivas på olika sätt.

$$\log_e(\ldots)$$

$$\ln(\ldots)$$

Det är främst den andra beteckningen som används i matematiska formler.

GEOMETRI

Geometri, "jordmätning", är den matematiska läran om rumsliga samband och vilka egenskaper som figurer har.

Vinklar

Om man ritar två radier (raka linjer) från en cirkels centrum till olika punkter på dess yta så utgör området mellan de två radierna en sektor (i vardagligt språk används även ordet "tårtbit"). Vinkeln anger riktningsskillnaden mellan de två radierna som avgränsar sektorn.

Delar man in en cirkel i 360 lika stora sektorer så motsvarar varje vinkel en grad. En grad skrivs 1° och en hel cirkel motsvarar alltså 360°. När man önskar mer exakta värden används oftast bara decimaler av grader men inom geografi och astronomi förekommer även de mindre enheterna bågminuter och bågsekunder. En bågminut skrivs 1' och en bågsekund skrivs 1". 1° motsvarar 60' och 1' motsvarar 60" (och 1° motsvarar därmed 3600").

Inom matematiken används dock främst SI-enheten för vinklar: radianer. En radian definieras som en vinkel där sektorns sida utmed cirkelns yta är lika lång som radien. En radian skrivs 1 rad och en hel cirkel motsvarar alltså 2π rad. Jämfört med att dela in en cirkel i ett godtyckligt antal vinklar, till exempel 360, är radianer egentligen ett naturligare sätt att beskriva vinklar i en cirkel – särskilt med tanke på att en cirkels omkrets är just 2π multiplicerat med radien.

Geometriska vinkelförhållanden

Summan av alla vinklar på ena sidan av en rak linje är 180°. Ifall det vinkelutrymmet är uppdelat mellan två vinklar så måste alltså respektive vinkel vara lika med 180° minus den andra vinkeln.

Ifall en linje skärs av en annan linje så bildas totalt fyra vinklar runt skärningspunkten. Då är summan av två sidovinklar (ligger bredvid varandra) alltså 180° medan två vertikalvinklar (ligger motstående varandra) är lika stora.

Ifall den skärande linjen skär en andra linje som är parallell med den första linjen så kommer vinklarna runt den andra skärningspunkten att vara identiska med vinklarna runt den första. Likbelägna vinklar avser vinklar med samma lägen i förhållande till de respektive skärningspunkterna medan alternatvinklar avser en vinkel och dess likbelägna vinkels vertikalvinkel.

Summan av de inre vinklarna är 180° grader för en triangel, 360° grader för en fyrhörning och 540° grader för en femhörning.

Om man utifrån två punkter i en cirkels omkrets ritar ett par linjer som bildar en medelpunktsvinkel vid cirkelns mitt och sedan även ett par linjer som bildar en randvinkel vid cirkelns utkant så är medelpunktsvinkeln alltid dubbelt så stor som randvinkeln.

Två likformiga geometriska figurer kännetecknas av att de har exakt samma vinklar. Därmed har deras sidor samma proportioner, både gentemot varandra inom samma figur och vid jämförelser med deras motsvarigheter i den andra figuren.

En bisektris är en linje som delar en vinkel i två lika stora delar.

Trigonometri

Trigonometri, "triangelmätning", beskriver samband mellan trianglars sidor och vinklar och används bland annat inom fysik.

Hos en liksidig triangel är alla sidor lika långa och alla vinklar är 60°. En likbent triangel kännetecknas istället av att den har två sidor som är lika långa och två vinklar som är lika stora. En trubbvinklig triangel har en vinkel som är större än 90°, en spetsvinklig triangel har bara vinklar mindre än 90° och en rätvinklig triangel har en vinkel på exakt 90°. I en rätvinklig triangel kallas den långa sidan för hypotenusan medan de kortare sidorna kallas för katetrar. Längdförhållandet mellan hypotenusan och katetrarna beskrivs, precis som du fick lära dig i grundskolan, av Pythagoras sats (efter matematikern, filosofen och religionsgrundaren **Pythagoras av Samos**). Om hypotenusans längd betecknas c och katetrarnas längder betecknas a respektive b så skrivs sambandet som nedan.

$$a^2+b^2=c^2$$

Orden "närliggande" respektive "motstående" används för att ange vilken kateter man syftar på i förhållande till någon av de två icke-räta vinklarna i den rätvinkliga triangeln. Den närliggande katetern är den kateter som ingår i vinkeln medan den andra katetern utgör den motstående katetern.

Kvoten mellan den motstående katetern och den närliggande katetern kallas för tangens. Så länge som vinkeln förblir oförändrad så har kvoten mellan dessa alltid samma värde, oavsett hur långa katetrarna är, eftersom man bara växlar mellan likformiga trianglar. Tangens för vinkeln v är alltså lika med kvoten mellan den motstående katetern b respektive den närliggande katetern a (beräkningarna för omvandlingen mellan kvot och motsvarande vinkelvärde görs numera med miniräknare eller andra datorer).

$$\tan(v)=\frac{b}{a}$$

Omvänt gäller att arctangens (skrivs ofta som $\tan^{-1}$) för kvoten mellan b och a är lika med vinkeln v.

$$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)=v$$

Om man har värdet för v men saknar värdet för b eller a så kan man alltså beräkna det algebraiskt.

Kvoten mellan den motstående katetern och hypotenusan kallas för sinus.

$$\sin(v)=\frac{b}{a}$$

Omvänt gäller att arcsinus (skrivs ofta som $\sin^{-1}$) för kvoten mellan *b* och *c* är lika med vinkeln *v*.

$$\arcsin(\frac{b}{a})=v$$

Kvoten mellan den närliggande katetern och hypotenusan kallas för cosinus.

$$\cos(v)=\frac{b}{a}$$

Omvänt gäller att arccosinus (skrivs ofta som $\cos^{-1}$) för kvoten mellan *a* och *c* är lika med vinkeln *v*.

$$\arccos(\frac{b}{a})=v$$

Enhetscirkeln är en modell som används för att visualisera hur värden av sinus, cosinus och tangens varierar beroende på vinkeln. Modellen utgörs av ett *xy*-diagram där origo omges av en cirkel med en radie på 1 längdenhet. Övre högra kvadranten (positiva värden på *x*, positiva värden på *y*) kallas för första kvadranten, övre vänstra kvadranten (negativa värden på *x*, positiva värden på *y*) kallas för andra kvadranten, nedre vänstra kvadranten (negativa värden på *x*, negativa värden på *y*) kallas för tredje kvadranten och nedre högra kvadranten (positiva värden på *x*, negativa värden på *y*) kallas för fjärde kvadranten. När man ökar en vinkel så rör man sig moturs längs enhetscirkeln och de värden på *x* respektive *y* som passeras utgör samtidigt värdena på cosinus respektive sinus för den aktuella vinkeln. Till exempel gäller att $\sin(30)=0{,}5$ och vid vinkeln +30° i enhetscirkeln ses just *y*-värdet 0,5. I enhetscirkeln kan även negativa vinklar användas, exempelvis –30° istället för +330°. En viktig sak att komma ihåg är att alla *y*-värden motsvaras av två arcsinusvärden (*v* och 180-*v*) och alla *x*-värden motsvaras av två arccosinusvärden (*v* och –*v*).

Även om en triangel inte är rätvinklig så är det möjligt att använda sinus för att beräkna triangelns area, förutsatt att man känner till två sidors längder samt vinkeln mellan dessa sidor. Nedanstående ekvation kallas för areasatsen.

$$\text{area}=\frac{\text{sida 1}\cdot\text{sida 2}\cdot\sin(\text{vinkel})}{2}$$

Det är även möjligt att beräkna de övriga vinklarna i en icke rätvinklig triangel, förutsatt att man känner till antingen två sidolängder och en vinkel eller två vinklar och en sidolängd. Sinusvärdet för en vinkel dividerat med den motstående sidans längd är nämligen lika med sinusvärdet för en annan vinkel dividerat med den vinkelns motstående sidas längd. Allt man behöver göra är att lösa ut det okända värdet. Om vinkeln A har den motstående sidan a och vinkeln B har den motstående sidan b så skrivs sinussatsen enligt nedan.

$$\frac{\sin(A)}{a}=\frac{\sin(B)}{b}$$

Om man sätter en vinkel till 90° så får man den tidigare definitionen av sinus, som alltså kan anses vara ett specialfall av sinussatsen – ifall man lär sig sinussatsen så behöver man alltså inte längre minnas den matematiska definitionen av sinus för rätvinkliga trianglar, åtminstone i teorin.

Cosinussatsen kan användas när man känner till antingen alla tre sidolängder eller två sidolängder och en vinkel. Om sidolängderna betecknas a, b och c och vinkeln motstående a betecknas A så skrivs ekvationen som nedan. Återigen behöver man bara lösa ut det okända värdet.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos(A)$$

Vid trigonometrisk problemlösning är det inte ovanligt att man ska räkna ut sidolängder eller vinklar hos trianglar som inte är rätvinkliga. Lösningen är då att på något sätt få fram rätvinkliga "låtsastrianglar" som kan utnyttjas för att få fram svaret. Till exempel kan spetsvinkliga trianglar delas upp i två mindre rätvinkliga trianglar genom att klyvningen görs vinkelrätt från en sida så att dess motstående vinkel delas i två mindre vinklar. På motsvarande sätt kan trubbvinkliga trianglar användas för att skapa en större rätvinklig triangel, genom att en sida hålls oförändrad och gemensam mellan de två trianglarna medan en annan sida förlängs tills det går att bilda en rät vinkel genom att rita en helt ny sida i en triangel som skulle ha antingen den oförändrade eller den förlängda sidan som hypotenusa.

Trigonometri används även inom beräkningar med vektorer. En vektor anger ett värde (ofta en hastighet eller kraft) som har en viss riktning. En vektor kan brytas upp i mindre "del-vektorer", så kallade komposanter, som anger värdet för olika riktningar och därmed beskriver vektor på ett utvecklat sätt. Ett exempel på detta vore en fotbollsspelare som springer snett över en fotbollsplan, från ett hörn till det motstående hörnet; hastigheten och riktningen utgör då tillsammans vektorn och den kan brytas upp i två delhastigheter, en i samma riktning som fotbollsplanens långsida och en i samma riktning som fotbollsplanens kortsida. Komposanterna beskriver då dels spelarens hastighet i riktning mot kortsidan respektive spelarens hastighet i riktning mot långsidan. Om du kastar en boll uppåt med 45° vinkel så kan den sägas ha dels en hastighet i höjdled och dels en hastighet i sidled.

På motsvarande sätt kan man även räkna åt andra hållet och slå ihop flera vektorer till en enda resultant. Uppdelningar i komposanter och sammanslagningar i resultanter görs enkelt med tidigare nämnda trigonometriska räknemetoder; ofta beräknas resultanter enklast genom att man först delar upp vektorer i komposanter, sedan summerar dessa per riktning och slutligen beräknas resultanten utifrån komposanternas summor. I formler betecknas vektorer ofta som variabler med en vågrät pil ovanför. Exemplet nedan visar hur man skriver en vektor med komposanterna 4 och 3.

$$\vec{v}=(4,3)$$

Trigonometriska kurvor

Trigonometriska kurvor avser periodiska växlingar i värde motsvarande hur sinus, cosinus och tangens ger olika värden vid olika vinklar. Om x representerar en vinkel och y representerar dess sinusvärde så skulle kurvan börja med y-värdet 0 vid 0°, öka till 1 vid 90°, sjunka via 0 vid 180° till –1 vid 270°, återvända till 0 vid 360° och sedan upprepa samma mönster i 360°-intervaller.

$$y=a\cdot\sin(p\cdot v+f_h)+f_v$$

De trigonometriska kurvorna kan även manipuleras på olika sätt, som illustreras i formeln ovanför.

- Faktorn a avgör vilken amplitud sinuskurvan har, det vill säga vilka y-värden som den varierar mellan. Till exempel skulle amplituden 2 innebära att sinuskurvan varierar mellan +2 och –2 istället för +1 och –1. Genom att sätta a till –1 vänds sinuskurvan upp och ned.
- Faktorn p styr vilken period sinuskurvan har, det vill säga hur många grader som krävs för att kurvan ska passera båda sina extremvärden och återvända till utgångsläget. Till exempel skulle p-värdet 3 innebära att perioden minskar från 360° till 120°.
- Termen f_h förskjuter hela kurvan horisontellt. Till exempel skulle f_h-värdet 90° innebära att sinusvärden tidigareläggs med 90° så att maximum nås redan vid 0° istället för vid 90°.
- Termen f_v förskjuter hela kurvan vertikalt. Till exempel skulle f_v-värdet 2 innebära att kurvan varierar mellan +3 och +1 istället för +1 och –1.

För lösningar av trigonometriska ekvationer är det viktigt att tänka på att lösningens y-värde inte bara skär kurvan vid två vinkelvärden (v) under en period, med undantag för lösningar som exakt motsvarar maximum- eller minimumvärdet, utan dessutom skär kurvan i alla följande perioder (n).

$x=\pm v+n\cdot 360°$ för cosinus

$x=90°\pm(90°-v)+n\cdot 360°$ för sinus

$x=v+n\cdot 180°$ för tangens

(INFINITESIMAL)KALKYL

Denna gren inom matematiken är namngiven efter det latinska ordet *calculus*, "liten krita", och omfattar gränsvärden, derivator, differentialer och integraler. Matematiska funktioner är ett centralt begrepp för området.

Funktioner

Funktioner inom matematiken är ekvationer som utifrån ett inmatat värde ger ett resulterande värde. Det "inmatade värdet" kallas även för oberoende variabel. Medan syftet med en vanlig ekvation är att räkna ut specifika värden kan syftet med funktioner sägas vara att visa hur den beroende variabeln varierar beroende av värdet på den oberoende variabeln. Ifall den oberoende variabeln betecknas x så skrivs en funktion av den som $f(x)$.

$f(x)=2x+3$ och $x=2$ ger då $f(2)=2\cdot 2+3=7$

Ofta används grafer för att illustrera hur funktioners resulterande värden varierar med den oberoende variabelns värde och då är det inte helt ovanligt att $f(x)$ istället skrivs som den beroende variabeln y.

Det är även möjligt att beräkna vilken funktion som en linje har. Enklast är detta med raka linjer där funktionen alltså kan skrivas som $f(x)=k\cdot x+m$. Ifall man har två mätpunkter så kan man först beräkna k genom att beräkna skillnaden mellan mätpunkternas y-värden och dividera denna med skillnaden mellan deras x-värden, varefter m kan beräknas genom att en av mätpunkternas värden för x och y sätts in i funktionen så att m är den enda återstående variabeln i ekvationen. Ifall man istället utgår från en mätpunkt och linjens lutning så kan man direkt ta itu med att beräkna m.

En funktion med konstant förändringstakt kallas för linjär funktion, en funktion där x är upphöjt till en konstant kallas för potensfunktion (andragradsfunktion om exponenten är 2) och en funktion där en konstant är upphöjd till x kallas för exponentialfunktion.

Derivering

En sekantlinje är en rak linje som skär genom punkter i en kurva. Kurvans medelförändringstakt mellan x_1, y_1 och x_2, y_2 motsvaras av sekantens lutning. Detta kallas även för differenskvoten.

$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{(x_1+\Delta x)-x_1}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}$$

Räkneexempel: År 2010 vägde Adam 80 kg, år 2011 vägde han 95 kg och år 2012 vägde han 90 kg.

$$k=\frac{90-80}{2012-2010}=\frac{10}{2}=5$$

En tangentlinje är en rak linje som i en punkt har samma värden som en kurva utan att korsa denna. I punkten som delas av kurvan och tangenten har de båda alltså samma lutning. Tangentens lutning motsvarar kurvans förändringstakt för y relativt x i tangeringspunkten.

Ett gränsvärde anger vilket värde en funktion närmar sig när en ingående variabel går mot ett visst värde. Om gränsvärdet för $f(x)$ när x går mot x_1 är lika med N så skrivs det matematiskt:

$$\lim_{x\to x_1} f(x)=N$$

En derivata är en funktion som visar tangentens lutning vid varje giltigt x-värde för funktionen. Derivatan för funktionen $f(x)$ kan skrivas på flera olika sätt, varav vilka de två vanligaste är:

$f'(x)$ alternativt y' där varje ytterligare deriveringssteg lägger till en apostrof

$\frac{dy}{dx}$ där deriveringssteg n skrivs $\frac{d^n y}{dx^n}$

En derivatas värde utgörs av gränsvärdet för differenskvoten när differensen går mot 0.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Räkneexempel: Derivatan för $f(x)=3x+1$ blir...

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(3(x+\Delta x)+1)-(3(x)+1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x+3\Delta x+1-3x-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

$f(x)=3x+1$ och $f(x)=3x+100$ har båda alltså derivatan $f'(x)=3+0=3$

Vid beräkning av en funktions derivata avseende en variabel multipliceras således alla termer i funktionen med den exponent som variabeln har i termen ifråga ($9x^1$ multipliceras med 1, $9x^2$ multipliceras med 2 och så vidare) varefter alla dessa exponenter minskas med 1. Termer som inte innehåller variabeln, det vill säga konstanter, försvinner alltså (de kan sägas innehålla x^0).

Deriveringsregler

Derivator för deriveringsvariabeln *x*:

k	0	ensamma konstanter försvinner helt
$k \cdot x$	k	*x* försvinner, multiplikatorn blir kvar
		exempel: $f(x)=x+2$ ger $f'(x)=1$
$k \cdot x^j$	$j \cdot k \cdot x^{j-1}$	multiplicera *x* med exponenten, minska exponenten med 1
		exempel: $f(x)=2x^2+2x+1$ ger $f'(x)=4x+2$
$k / x^j = k \cdot x^{-j}$	$-j \cdot k \cdot x^{-j-1}$	multiplicera *x* med exponenten, minska exponenten med 1
		exempel: $f(x)=x^{-2}+2x+1$ ger $f'(x)=-2x^{-3}+2$

Derivator för exponenter och logaritmer av deriveringsvariabeln *x*:

k^x (då $k>0$)	$k^x \cdot \ln k$	multiplicera k^x med den naturliga logaritmen av *k*
		exempel: $f(x)=3^x+2$ ger $f'(x)=3^x+\ln 3$
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$	multiplicera $e^{k \cdot x}$ med derivatan av $k \cdot x$
		exempel: $f(x)=e^{3x}+2$ ger $f'(x)=3e^{3x}$
$\ln(k \cdot x)$	$k/(k \cdot x)$	dividera derivatan av $k \cdot x$ med $k \cdot x$
		exempel: $f(x)=\ln(3x+2)$ ger $f'(x)=3/(3x+2)$
$\log_j(k \cdot x)$	$k/(k \cdot x \cdot \ln j)$	dividera derivatan av $\ln(k \cdot x)$ med $\ln j$
		exempel: $f(x)=\log_{10}(2x+1)$ ger $f'(x)=2/((2x+1)\cdot \ln 10)$

Derivator för funktioner av deriveringsvariabeln *x*:

$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	derivatan av ena plus derivatan av andra
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$	som ovan, fast minus och division med $(g(x))^2$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$	yttre derivatan multiplicerad med inre derivatan
		exempel: $f(x)=(x^2+x)^5$ ger $f'(x)=5 \cdot (x^2+x)^4 \cdot (2x+1)$

Derivator för trigonometriska funktioner av deriveringsvariabeln *x*:

$\sin(k \cdot x)$	$k \cdot \cos(k \cdot x)$	multiplicera med derivatan av inre uttrycket, byt sin mot cos
		exempel: $f(x)=\sin(3x+2)$ ger $f'(x)=3 \cdot \cos(3x+2)$
$\cos(k \cdot x)$	$-k \cdot \sin(k \cdot x)$	multiplicera med derivatan av inre uttrycket, byt cos mot –sin
		exempel: $f(x)=\cos(3x+2)$ ger $f'(x)=-3 \cdot \cos(3x+2)$
$\tan(k \cdot x)$	$k \cdot \cos(k \cdot x)$	utnyttja att $\tan(k \cdot x)=\dfrac{\sin(k \cdot x)}{\cos(k \cdot x)}$ och kvotderivering (se ovan)
		exempel: $f(x)=\sin(3x+2)$ ger $f'(x)=3 \cdot \cos(3x+2)$

Maximum-, minimum- och terrasspunkter

Med vertex avses en vändpunkt i en graf, till exempel en maximumpunkt eller minimumpunkt. En vertikal linje som skär genom en vertex kallas för symmetrilinje. I en andragradsfunktion motsvarar symmetrilinjens *x*-värde även mittpunkten mellan de *x*-värden där $y=0$. Dessa tre *x*-värden kan fås fram algebraiskt genom att man sätter funktionens värde till 0 och löser ut *x*. Termen före ±-tecknet motsvarar då *x*-värdet för symmetrilinje / vertex medan hela uttrycket anger de *x*-värden där $y=0$.

Ett annat sätt för att identifiera maximum-, minimum- och terrasspunkter är att sätta $f'(x)=0$. Genom att sedan beräkna $f'(x)$ för *x*-värden som ligger mellan, över och under dessa punkter kan även punkternas typer identifieras; maximumpunkter föregås av positiv derivata och följs av negativ derivata, för minimumpunkter gäller det omvända och för terrasspunkter gäller att derivatan har samma tecken både före och efter.

Räkneexempel: $f(x)=x^3+3x^2$

$f'(x)=3x^2+6x=0$ vilket kan skrivas om till $f'(x)=3x(x+2)=0$

Om $3x=0$ eller $x+2=0$ så blir $f'(x)=0$.

Alltså gäller att $x=0$ och $x=-2$ motsvarar maximum-, minimum- eller terrasspunkter.

$x<-2$ ger positiva värden, $-2<x<0$ ger negativa värden och $0<x$ ger positiva värden.

Alltså motsvarar $x=-2$ en maximumpunkt och $x=0$ en minimumpunkt.

Andraderivator

Om en förstaderivata deriveras så erhålls en andraderivata, som alltså beskriver förstaderivatans förändringstakt. Ett vanligt illustrerande exempel på detta är förhållandet mellan färdad sträcka, hastighet och acceleration, där hastigheten ger förändringen i färdad sträcka och accelerationen i sin tur ger förändringen i hastighet.

Räkneexempel: $f(x)=x^2+3x+4$

$f'(x)=2x+3$ vilket ger $f''(x)=3$

Primitiva funktioner

Primitiva funktioner beräknas enligt samma principer som derivator men i omvänd riktning. En derivata innehåller inte någon information om de konstanter som kan finnas på den lägre nivån och därför läggs "konstanten" C till i den framräknade primitiva funktionen. Om inte funktionen $f(x)$ som man utgår ifrån är angiven som en derivata så betecknas dess primitiva funktion $F(x)$.

Räkneexempel: $f(x)=2x+3$

$$F(x)=x^2+3x+C$$

Integraler

Integraler motsvarar arean i diagram mellan funktionskurvan och x-axeln, mellan en nedre och en övre gräns på x. Integralers värde beräknas som den primitiva funktionens värde vid den övre gränsen minus den primitiva funktionens värde vid den nedre gränsen. Integralers värden kan anges med storheten "areaenheter" (a.e.) ifall ingen lämpligare enhet föreligger.

$$\int_{\text{nedre gräns}}^{\text{övre gräns}} f(x)\,dx=[F(x)]_{\text{nedre gräns}}^{\text{övre gräns}}=F(\text{övre gräns})-F(\text{nedre gräns})$$

Observera att areor på olika sidor om x-axeln inte kan beräknas samtidigt; de tar då ut varandra. Till exempel returnerar integralerna för sinus och cosinus värdet 0 för en komplett cykel (0-360 grader).

Räkneexempel: $f(x)=2x+3$ mellan $x=0$ och $x=3$

$$F(x)=x^2+3x+C$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)=(4^2+3\cdot 4+C)-(0^2+3\cdot 0+C)=28+C-C=28 \text{ a.e.}$$